Комитет образования ЕАО
Областное государственное профессиональное
образовательное бюджетное учреждение
«ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ТЕХНИКУМ»

Рассмотрено на заседании ПЦК
(протокол № _____ от ________)
Председатель ПЦК ________

Утверждено
Директор ОГПОБУ
«Политехнический техникум»
М.Б.Калманов ____________

Методическая разработка для преподавателей СПО

«Методические указания к выполнению практических работ по дисциплине «Математика» для студентов ОГПОБУ «Политехнический техникум»

Учебная методическая разработка

Разработчик(и): Мокшанцева Н.Н., преподаватель математики

Составитель(и): Берман Н.А., методист

Биробиджан
2017

Учебная методическая разработка для преподавателей СПО содержит материалы, позволяющие организовать практические занятия по дисциплине «Математика». Даёт возможность познакомиться с опытом работы преподавателя во время подготовки обучающихся к выполнению практических работ.

Данные методические рекомендации содержат не только практический материал по дисциплине «Математика», но и дают возможность повторить некоторые разделы дисциплины, позволяет познакомиться с методической работой преподавателя техникума.

Данный методический материал помогает педагогу разобраться в актуальных вопросах преподавания Математики в техникуме, школе.

Методическая разработка будет интересна преподавателям, методистам СПО и школьным учителям.

Содержание

Практическая работа №1.

Тема: «Выполнение приближенных вычислений».

Цель: овладение приемами вычислений с приближенными данными.

Оснащение урока: методические указания к выполнению работы**.**

Межпредметные связи: физика, геометрия

Обучающийся должен:

знать:

- определение действительного числа, абсолютной и относительной погрешности приближений;
- практические приемы вычислений с приближенными данными;

уметь:

- находить абсолютную погрешность приближенного значения числа;
- находить границы абсолютной погрешности;
- записывать приближенное значение числа;
- округлять приближенные значения чисел;
- находить относительную погрешность приближенного значения числа;
- выполнять действия с приближенными числами;
- вычислять с наперед заданной точностью.

Точные и приближенные значения величин.

При решении различного рода практических задач приходится оперировать величинами двух родов. Одни в точности дают истинную величину, другие – только приблизительно. Первые называют точными значениями величины, вторые – приближенными. Так, например, вытачивая на станке деталь, рабочий производит измерения с помощью какого-либо прибора (штангенциркуля, микрометра и т.п.), точность которого всегда ограничена, и поэтому он гарантирует лишь ту или иную степень точности размеров изготовленной им детали. Даже производя подряд измерения одной и той же величины, мы каждый раз получаем результаты, отличающиеся друг от друга. Поэтому, когда мы говорим, что реальная величина равна данному числу, то имеем в виду, что в результате соответствующих измерений нами были получены числа, настолько мало отличающиеся от истинного значения измеряемой величины, что этой разницей можно пренебречь.

Применение математики в производстве всегда связано с вычислениями. Поэтому необходимо научиться правильно вычислять. Так как в практике приходится оперировать с приближенными значениями величин, то весьма важно знать специальные правила и приемы, позволяющие находить результаты этих операций с требуемой в каждом конкретном случае точностью.

На практике вычисления могут быть выполнены различными способами, и их можно признать хорошими только тогда, когда применен тот способ который, с одной стороны, приводит к достаточной точности и, с другой, - требует наименьшей затраты времени и труда.

Основными требованиями, предъявляемыми к вычислениям при работе над приближенными величинами, являются:

1) умение оценить необходимую точность приближения при измерениях;
2) умение по степени точности исходных данных оценить степень точности результатов;
3) умение выполнять действия над приближенными величинами в границах целесообразной точности;

Задачи: рассмотреть простейшие приемы приближенных вычислений и соответствующие правила и научиться их применять на практике.

Ответить письменно на вопросы.

1) Перечислите основные требования к измерениям.
2) Как определяются оценки значений границ при приближенных вычислениях?
3) Как определяются границы суммы, разности, произведения и частного приближенных величин? Приведите примеры.
4) Дайте определение понятию погрешности при измерении величин.
5) Как определяется точность приближенного значения величины?
6) Какие цифры называются значащими при измерениях?
7) Что называются абсолютной и относительной погрешностью величин? Приведите примеры.
8) Как оцениваются границы погрешностей суммы, разности, произведения и частного приближенных величин? Приведите примеры.
9) Как производится подсчет верных цифр при сложении, вычитании, умножении и делении приближенных величин? Приведите примеры.
10) Как проводятся вычисления с заданной точностью? Приведите примеры.

Выполнить один из вариантов самостоятельной работы.

Принцип оценивания работы.

«5» - правильное оформление (записаны тема, цель, задачи выполнения практической работы); выписаны абсолютно все примеры, данные в теоретической части; дан ответ на все вопросы к практической работе, выполнен вариант самостоятельной работы.

Ход занятия.

1. **Теоретическая часть.**

Абсолютная погрешность приближенного значения числа. Граница абсолютной погрешности.

Модуль разности между точным числом x и его приближенным значением а называется абсолютной погрешностью приближенного значения числа x и обозначается через α, т.е. $|x-\alpha| = \alpha$.

Число а называется приближенным значением точного числа x с точностью до $\Delta \grave{a}$, если абсолютная погрешность приближенного значения а не превышает $\Delta \grave{a}$, т.е. $|x-\grave{a}| \leq \Delta \grave{a}$

Число $\Delta \grave{a}$ называется границей абсолютной погрешности приближенного числа $\grave{a}$. Существует бесконечное множество чисел $\Delta \grave{a}$, удовлетворяющих приведенному определению; поэтому на практике стараются подобрать возможно меньшее и простое по записи число $\Delta \grave{a}$.

По известной границе абсолютной погрешности $\Delta \grave{a}$ находят границы, в которых заключено точное значение числа x:

$$(x = \grave{a} \pm \Delta \grave{a}) \Leftrightarrow (\grave{a} - \Delta \grave{a} \leq \grave{a} + \Delta \grave{a})$$

1. **Даны приближенные значения числа x =2/3; a_1 = 0,6; a_2 = 0,66; a_3 =0,67. Какое из этих трех приближений является лучшим?**

   - Находим:

$$\alpha_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right| = \frac{1}{15}\ ; \qquad \alpha_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{33}{50}\right| = \frac{1}{150};$$

$$\alpha_3 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$$

Лучшим приближением числа x является a_3 = 0,67.

2. **Длина детали x (см) заключена в границах 33 $\leq x \leq$ 34. Найти границу абсолютной погрешности измерения детали.**

- **Примем за приближенное значение длины детали среднее арифметическое границ: а = (33 + 34)/2 = 33,5 (см). Тогда граница абсолютной погрешности приближенного значения длины детали не превзойдет 0,5 (см).**

Величину $\Delta \grave{a}$ можно найти и как полуразность верхней и нижней границ, т.е.

$\Delta\grave{a}$ = (34 – 33)/2 = 0,5 (см). Длина детали x, найденная с точностью до $\Delta\grave{a}$ = 0,5 (см), заключена между приближенными значениями числа x:

$33{,}5 - 0{,}5 \le x \le 33{,}5 + 0{,}5$; $x = 33{,}5 \pm 0{,}5$ (см).

Верные и значащие цифры числа.

Цифра m приближенного числа а называется верной в широком смысле, если граница абсолютной погрешности числа а не превосходит единицы того разряда, в котором записывается цифра m.

Цифра m приближенного числа а называется верной в строгом смысле, если граница абсолютной погрешности числа а не превосходит половины единицы того разряда, в котором записана цифра m.

В числах. Полученных в результате измерений или вычислений и используемых при расчетах в качестве исходных данных, а также в десятичной записи приближенного значения числа, все цифры должны быть верными.

Наиболее употребительна такая запись приближенного числа (например, в математических таблицах), при которой цифры верны в строгом смысле.

Граница абсолютной погрешности $\Delta\grave{a}$ находится непосредственно по записи приближенного значения а числа x.

Цифры в записи приближенного числа, о которых не известно, являются ли они верными, называются сомнительными.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его верные цифры, кроме нулей, стоящих перед первой цифрой (слева направо), отличной от нуля.

Округление чисел.

При округлении числа а его заменяют числом a_1 с меньшим количеством значащих цифр. Абсолютная величина разности $\left|\grave{a} - \grave{a}_1\right|$ называется погрешностью округления.

При округлении числа до m значащих цифр отбрасываются все цифры, стоящие правее m-й значащей цифры, или при сохранении разрядов заменяют их нулями. При этом если первая слева из отброшенных цифр больше или равна 5, то последнюю оставшуюся цифру увеличивают на единицу.

При применении этого правила погрешность округления не превосходит половины единицы десятичного разряда, определяемого последней оставленной значащей цифрой.

Округление приближенных значений чисел с сохранением в записи только верных цифр производится до разряда, в котором записана первая справа верная цифра.

3. Найти границу абсолютной погрешности приближенного значения 0,1968 числа x, все цифры которого верны в строгом смысле.

• Граница абсолютной погрешности этого числа равна 0,00005, т.е. половине единицы последнего разряда, сохраняемого в записи.

4. Указать верные цифры (в широком смысле) следующих чисел:

1) 3,73 $\pm$ 0.056; 2) 3,627 $\pm$ 0.0008 3) 4,732 $\pm$ 0,06

• 1) Граница погрешности $\Delta \grave{a}$ = 0,056 не превосходит единицы разряда десятых (неравенство 0,056 < 0,1 верное). Следовательно, верными являются цифры 3 и 7.

2) Так как $\Delta \grave{a}$ = 0,0008< 0,1, то все цифры приближенного числа 3,627 верны;

3) Поскольку $\Delta \grave{a}$ = 0,06 < 0,1, верными являются цифры 4 и 7.

5. Приближенное значение числа 9,587 $\pm$ 0,03 округлить до первого справа верного разряда.

• Первая справа верная цифра находится в разряде десятых, поэтому число 9,587 округляем до десятых: 9,587 $\approx$ 9,6. Новое значение границы погрешности $\Delta \grave{a}$ = 0,03 + 0,013 = 0,043 < 0,1. Число 9,6 является приближенным значением числа (.587 с точностью дл 0,1. Цифры 9 и 6 верные.

Относительная погрешность приближенного значения числа.

Относительной погрешностью δ приближенного значения а числа х называется отношение абсолютной погрешностью α этого приближения к числу а, т.е. δ = α /а.

Так как абсолютная погрешность α обычно бывает неизвестна, то на практике оценивают модуль относительной погрешности некоторым числом ε, которое заведомо не меньше этого модуля: $|\delta| \le \varepsilon$. Число ε называется границей относительной погрешности.

Границей относительной погрешности $\varepsilon_{\text{а}}$ приближенного значения а называется отношение границы абсолютной погрешности Δ а к модулю числа а:

$$\varepsilon_{\text{а}} = \frac{\Delta \grave{a}}{|\grave{a}|} \qquad (1)$$

Чем меньше относительная погрешность, тем выше качество измерений или вычислений. Относительная погрешность – величина безразмерная, что позволяет сравнивать качество измерений величин разной размерности.

В технических и других расчетах, не требующих особо высокой точности, достаточно бывает обеспечить точность результата порядка десятых долей процента. Поэтому в технических расчетах принято выполнять вычисления с трем значащими цифрами.

В ряде задач границу абсолютной погрешности находят по данной относительной погрешности и модулю приближенного значения величины:

$\Delta\ \grave{a} = |\grave{a}|\varepsilon_0$ (1.2)

6.В результате измерений получили, что длина карандаша равна 16 см, а длина комнаты равна 730 см. Что можно сказать о качестве этих двух измерений?

- Будем считать границу абсолютной погрешности измерений равной $\pm$ 0,5 см. Найдем относительные погрешности этих измерений:

ε = 0,5/16 = 0,0312 $\approx$ 3,1% (при измерении длины карандаша);

ε = 0,5/730 =).000685 $\approx$ 0,07% (при измерении длины комнаты).

7.Найти относительную погрешность числа 6,8. если обе цифры его верны в строгом смысле.

- По условию $\Delta\ \grave{a}$ = 0,05; поэтому ε_a = 0,05/6,8 = 0,00735 = 0,7%

8.Какие цифры числа 4,86 (0,3%) являются верными?

- По формуле (1.2) находим

$\Delta\ \grave{a} = 4{,}86 \cdot 0{,}003 = 0{,}0146 < 0{,}02$; $\grave{a}$ = 4,86 $\pm$ 0,02.

9.При вычислении некоторой величины X стало известно, что 6<X<7. Сколько верных цифр нужно взять, чтобы приближенное значение $\grave{a}$ имело относительную погрешность не больше 0,3%?

- Чтобы значение $\grave{a}$ было наибольшим, примем = 6,99. По формуле (1.2) получим $\Delta\ \grave{a} = 6{,}99 \cdot 0{,}003 = 0{,}021.$ Следовательно, нужно взять две верные цифры.

Действия над приближенными значениями чисел.

1. Сложение приближенных значений чисел.

Граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей этих чисел:

$\Delta(\grave{a} + \hat{a}) = \Delta\grave{a} + \Delta\hat{a}$ (2,1)

Где $\grave{a}$ и $\hat{a}$ - приближенные значения чисел; $\Delta\ \grave{a}$ и $\Delta\ \hat{a}$ - границы абсолютных погрешностей соответствующих приближений.

Граница относительной погрешности суммы вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{a+в} = \frac{\Delta(\grave{a} + \hat{a})}{\grave{a} + \hat{a}} \quad (2.2)$$

10. Найти сумму S приближенных значений чисел 6,8 $\pm$ 0,05; 4,3 $\pm$ 0,05 и 3,575 $\pm$ 0,0005

- Имеем

S = 6,8 + 4,3 + 3,575 = 14,675; ΔS = 0.05 + 0,05 + 0,0005 = 0,1005

Граница абсолютной погрешности заключена в пределах 0,05 < 0,1005 < 0,5. В приближенном значении суммы верными являются лишь две цифры (в результате десятков и единиц). Полученный результат округлим до единиц: S = 14,675 $\approx$ 15.

Вычитание приближенных значений чисел.

Граница абсолютной погрешности разности двух приближенных значений чисел равна сумме границ их абсолютных погрешностей:

$$\Delta(\grave{a}-\hat{a}) = \Delta\grave{a} + \Delta\hat{a} \qquad (2.3)$$

Граница относительной погрешности разности вычисляется по формуле

$$\varepsilon_{\text{а -в}} = \frac{\Delta\grave{a} + \Delta\hat{a}}{\grave{a}-\hat{a}} \qquad (2.4)$$

11. Вычислить разность двух приближенных значений чисел

а = 5,863 $\pm$ 0,0005 и в = 2,746 $\pm$ 0,0005. Найти $\Delta(\grave{a}-\hat{a})$ и $\varepsilon_{\text{а-в}}$

- По формуле (2.3) вычисляем границу абсолютной погрешности разности а – в:

$\Delta(\grave{a}-\hat{a})$ = 0,0005 + 0,0005 = 0,001

В приближенном значении разности цифра в разряде тысячных не может быть верной так как $\Delta(\grave{a}-\hat{a}) >$ 0,0005. Итак, а-в = 3,117 $\approx$ 3,12. Абсолютная погрешность разности 0,001. В приближенном числе 3,12 все цифры верные.

По формуле (2,4) находим относительную погрешность разности:

$\varepsilon_{\text{а-в}}$ = 0,001/3,12 = 0,00032 $\approx$ 0,03%

Умножение приближенных значений чисел.

Формулы для оценки границ абсолютной погрешности произведения (частного) сложны, поэтому на практике сначала находят относительную погрешность произведения (частного) , а затем границу абсолютной погрешности произведения (частного).

Формулы для границ абсолютной и относительной погрешностей некоторых функций приведены в табл. 1.

Функции	Граница абсолютной погрешности	Граница относительной погрешности	Номер формулы
$y = ab$	$\Delta y = \lvert b\rvert\, \Delta a + \lvert a\rvert\, \Delta b$	$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b}$	(2.5)
$y = abc$	$\Delta y = \lvert bc\rvert\, \Delta a + \lvert ac\rvert\, \Delta b$ + $\lvert ab\rvert\, \Delta\tilde{n}$	$\varepsilon_y =$ $\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta c}{c}$	(2.6)
$y = a^n$	$\Delta y = na^{n-1}\Delta a$	$\varepsilon_y = n\frac{\Delta a}{a}$	(2.7)

$y = a^2$	$\Delta y = 2a\ \Delta a$	$\varepsilon_y = 2\dfrac{\Delta a}{a}$	(2.8)
$y = a^3$	$\Delta y = 3a^2 \Delta a$	$\varepsilon_y = 3\dfrac{\Delta a}{a}$	(2.9)
$y = \sqrt{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{2\sqrt{a}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{2a}$	(2.10)
$y = \sqrt[3]{a}$	$\Delta y = \dfrac{\Delta a}{3\sqrt[3]{a^2}}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{3a}$	(2.11)
$y = \dfrac{a}{b}$	$\Delta y = \dfrac{\lvert b\rvert\Delta a + \lvert a\rvert\Delta b}{b^2}$	$\varepsilon_y = \dfrac{\Delta a}{a} + \dfrac{\Delta b}{b}$	(2.12)

12. Найти верные цифры произведения приближенных значений чисел a = 0,3862 и b = 0,8

- Имеем 0,3862 * 0,8 = 0,30896. Границы абсолютной погрешности сомножителей равны 0,00005 и 0,05. По формуле (2.5) находим относительную погрешность произведения:

$$\varepsilon_{ab} = \frac{0.00005}{0.3862} + \frac{0.05}{0.8} = 0.063$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности произведения:

$\Delta(ab) = 0{,}30896 \cdot 0{,}063 = 0{,}0195$ 0,005< 0,0195 < 0,05/

Полученный результат означает, что в произведении одна верная цифра (в разряде десятых): 0,30896 $\approx$ 0,3

13. Вычислить объем цилиндра $V = \pi R^2 H$, если R = 45,8 см, H = 78,6 см. Указать верные цифры ответа.

- Имеем $V = \pi 45{,}8^2 \cdot 78{,}6 = 517000$ см^3. Используя формулу (2.6) и (2.8) и полагая $\pi \approx 3{,}14$, находим относительную погрешность:

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta\pi}{\pi} + \frac{2\Delta R}{R} + \frac{\Delta \mathrm{H}}{\mathrm{H}} = \frac{0{,}005}{3{,}14} + \frac{2 \cdot 0{,}05}{45{,}8} + \frac{0{,}05}{78{,}6} = 0{,}0044$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности

$\Delta V = V \cdot \varepsilon_V = 517000 \cdot 0{,}0044 = 2270$ см^3

Верными цифрами являются 5 и 1.

Деление приближенных значений чисел.

14. Найти границу абсолютной погрешности частного приближенных значений чисел a = 8,36 $\pm$ 0,005 и b = 3,72 $\pm$ 0,004.

- Имеем 8,36 : 3,72 = 2,25. По формуле (2.12) находим относительную погрешность частного:

$$\frac{\Delta a}{a}+\frac{\Delta b}{b} = \frac{0{,}005}{8{,}36}+\frac{0{,}004}{3{,}72}=0{,}002=0{,}2\%$$

По формуле (1.2) находим границу абсолютной погрешности частного:

$$\Delta(\frac{\grave{a}}{b})=2{,}25\cdot 0{,}002=0{,}0045$$

Полученный результат означает. Что в частном все три цифры верные.

Возведение в степень приближенных значений чисел
и извлечение из них корня.

15. **Вычислить относительную погрешность, допущенную при вычислении площади квадрата, если приближенное значение стороны квадрата равно 68 $\pm$ 0,5.**

- По формуле (2.8) получим

$$\varepsilon_{68^2}=2\cdot 0{,}5:68=0{,}015=1{,}5\%$$

16. **Вычислить границу абсолютной погрешности при нахождении гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого равны**

$\grave{a}=56{,}8$ **см и** $b=44{,}6$ **см**

- Имеем $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{56{,}8^2+44{,}6^2}=72{,}21$ (см).

По формуле (2.10) и (2.8) находим границу абсолютной погрешности:

$$\Delta c=\frac{\Delta(a^2+b^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\Delta(a^2)+\Delta(b^2)}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2a\cdot\Delta a+2b\Delta b}{2\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a\cdot\Delta a+b\Delta b}{\sqrt{a^2+b^2}}=$$

$$=\frac{56{,}8\cdot 0{,}05+44{,}6\cdot 0{,}05}{72{,}21}=0{,}07\approx 0{,}1(\tilde{n}\grave{\imath})$$

Таким образом, $\tilde{n}=72{,}2\pm 0{,}1(\tilde{n}\grave{\imath})$ верными являются первые две значащие цифры: 7 и 2.

Вычисления с наперед заданной точностью.

Мы рассмотрели задачи, когда требовалось оценить погрешность полученного результата по данным действиям над приближенными числами и по данным границам их погрешностей.

В обратной задаче требуется установить, каковы должны быть погрешности данных приближенных чисел, чтобы в результате вычислений была получена наперед заданная допустимая граница погрешности.

17. **С какой точностью надо измерить длину стороны квадрата, чтобы при вычислении его площади граница абсолютной погрешности не превышала 1 см^2? Грубое приближение значений стороны квадрата равно 9 см.**

- Так как $S=a^2$, то используя формулу (2.8), получим $\Delta S = 2\grave{a} \cdot \Delta \grave{a}$

Откуда

$$\Delta \grave{a} = \frac{\Delta S}{2a} = 0{,}0556 \approx 0{,}1(\tilde{n}\grave{\imath}\ )$$

Итак, если измерить величину $\grave{a}$ с погрешностью, не превышающей 0,1 см, то погрешность площади не превысит 1 см^2.

18. **С какой точностью надо измерить длину ребра куба $\grave{a}$, чтобы при вычислении его объема граница абсолютной погрешности не превышала 100 см^3? Грубое приближенное значение ребра куба равно 80 см.**

- Так как $V = a^3$, то, используя формулу (2.9), получим $\Delta V = 3a^2 \cdot \Delta a$,

$$\Delta a = \frac{\Delta V}{3a^2} = \frac{100}{3 \cdot 80^2} = 0{,}005(\tilde{n}\grave{\imath}\ )$$

Следовательно, если измерить величину $\grave{a}$ с погрешностью, не превышающей 0,005 см, то погрешность объема не превысит 100 см^3.

Задачи для самостоятельного решения.

1 вариант

1) Вычислите сумму $\grave{a} = \sqrt{3} + \sqrt{7}$, взяв приближенные значения корней с точностью до 0,001; найдите $\varepsilon_{\grave{a}}$

2) Вычислите площадь параллелограмма, если a= 68,7 и h = 52,6. Укажите верные цифры ответа.

3) Найдите границу абсолютной погрешности произведения двух приближенных значений чисел a = 7,36 $\pm$ 0,004 и b = 8,61 $\pm$ 0,005.

4) Вычислите относительную погрешность $\sqrt{38{,}9}$

5) С какой точностью надо измерить радиус круга, чтобы относительная погрешность площади круга не превышала 0,5%? Грубое приближенное значение R = 8 м.

2 вариант.

1) Вычислите разность $\grave{a} = \sqrt{11} - \sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами; найдите $\varepsilon_{\grave{a}}$.

2) Вычислите площадь прямоугольника, если a = 78,6 и h=48,7.

Укажите верные цифры ответа.

3) Вычислите X = (a + b)/c, если a = 83,6, b = 93,8 и c = 61,9. Укажите границу абсолютной погрешности.

4) Вычислите относительную погрешность $\sqrt[3]{68{,}4}$.

5) С какой точностью надо измерить сторону квадрата, чтобы относительная погрешность площади квадрата не превышала 1%? Приближенное значение стороны квадрата а = 9 м.

Практическая работа №2.

Тема: «Показательная функция, ее свойства и график. Решение показательных уравнений и неравенств».

Цель:

- изучение свойства показательной функции;
- овладение методами решений показательных уравнений и неравенств.

Оснащение урока: методические указания к выполнению работы.

Межпредметные связи: физика.

Обучающийся должен:

знать:

- Иметь представление о показательной функции ее свойствах и графике;
- определение значения функции по значению аргумента при различных способах задания функции;
- иметь представление о показательном уравнении и неравенстве;
- знать основные методы решения показательных уравнений и неравенств (функционально-графический метод, метод уравнивание оснований, метод вынесения общего множителя за скобки, метод введения новой переменной).

уметь:

- **уметь** строить график показательной функции;
- Уметь определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции;
- Зная свойства показательной функции, уметь применять их при решении практических задач творческого характера;
- Уметь проводить описание свойств показательной функции по заданной формуле, без построения графика, применяя возможные преобразования графика.
- Уметь решать показательные уравнения и неравенства, применяя комбинацию нескольких алгоритмов;
- Уметь изображать на координатной плоскости множество решений простейших уравнений и их систем;
- Уметь работать с учебником, отбирать и структурировать материал;

- Уметь вступать в речевое общение;
- Уметь составлять текст научного стиля.

Выполнить один из вариантов самостоятельной работы.

Принцип оценивания работы.

«5» - правильное оформление (записаны тема, цель, задачи выполнения практической работы); выписаны абсолютно все примеры, данные в теоретической части; дан ответ на все вопросы к практической работе, выполнен вариант самостоятельной работы.

Ход занятия

Показательные уравнения и неравенства.

Уравнения (неравенства(, в которых неизвестное входит в показатель степени, называется **показательными.**

Например: $2^{x-3}=32$; $5^{x^2-1} > 1$.

Простейшие показательные уравнения (неравенства) – это уравнения (неравенства) вида : $a^x = b$; $a^x > b$; $a^x < b$; $a \neq 0$ $a \neq 1$; $b>0$.

Решение простейших показательных уравнений (неравенств)

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$		f(x) = g(x)		Приравниваем показатели при разных основаниях
a > 1 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$		f(x) > g(x)		Знак неравенства не изменяется
0 < a < 1 $a^{f(x)} > a^{g(x)}$		f(x) < g(x)		Знак неравенства изменяется на противоположный

Общего способа решения таких уравнений (неравенств) не существует. Рассмотрим некоторые типы и способы решения показательных уравнений (неравенств).

1. Простейшие и те, которые приводятся к ним следующим путем:
   - Приведение к одному основанию;
   - Вынесение общего множителя за скобки;

- Деление обеих частей на степень.

2. Показательные уравнение (неравенства), приводимые к алгебраическим:
   - Приведение к квадратному путем замены переменной;
   - Однородные.
3. «Нестандартные» показательные уравнения (неравенства)

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путем приведения к общему основанию.

1. Решить уравнение

$$\frac{(0,2)^{\tilde{o}-0,5}}{\sqrt{5}} = 5\cdot(0,04)^{\tilde{o}}$$

Решение:

1. Приведем обе части уравнения к основанию 5.

$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = 5^{-1};$ $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = 5^{0,5}$

$0,04 = \frac{4}{100} = \frac{1}{25} = 5^{-2}$

Получим

$$\frac{(5^{-1})^{\tilde{o}-0,5}}{5^{\frac{1}{2}}} = 5^1\cdot(5^{-2})^{\tilde{o}}$$

$5^{-\tilde{o}-0,5-0,5} = 5^{1-2\tilde{o}}$

$5^{-\tilde{o}-1} = 5^{1-2\tilde{o}}$

Уравняем показатели степени при одинаковых основаниях:

-x -1 = 1 – 2x.

Решим полученное уравнение:

-x + 2x = 1 + 1;

x = 2

Запишем ответ. Ответ: 2.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путем вынесения общего множителя за скобки.

Показательные уравнения (неравенства) вида

$$\grave{A}_0\cdot\grave{a}^{mx+k_0} + \grave{A}_1\cdot\grave{a}^{mx+k_1} + \grave{A}_2\cdot\grave{a}^{mx+k_2} + \ldots\ldots + \grave{A}_n\cdot\grave{a}^{mx+kn} = \text{M}$$

$$\grave{A}_0\cdot\grave{a}^{mx+k_0} + \grave{A}_1\cdot\grave{a}^{mx+k_1} + \grave{A}_2\cdot\grave{a}^{mx+k_2} + \ldots\ldots + \grave{A}_n\cdot\grave{a}^{mx+kn} \gtrless \text{M}$$

Приводятся к простейшим путем вынесения за скобки общего множителя $\grave{a}^{mx+k_i}$

Где k_i – наименьшее из чисел $k_0, k_1, k_{2\ldots}$ k_n .

При делении степеней с одинаковыми основаниями основание остается неизменным, а показатели – вычитаются.

$$\frac{2^{x-5}}{2^{x-8}} = 2^{x-5-(x-8)} = 2^{x-5-x+8} = 2^3 = 8\,.$$

1. Решить уравнение

$2^{3\sqrt{x}} + 3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1} = 20$

Решение.

Вынесем за скобки общий множитель (множитель с наименьшим из наличных показателей):

$2^{3\sqrt{x}-1}(2^{3\sqrt{\tilde{o}}-(3\sqrt{\tilde{o}}-1)} + 3) = 20$

$2^{3\sqrt{x}-1}(2+3) = 20$

Выполним действия в скобках

$2^{3\sqrt{x}-1}5 = 20$

Разделим левую и правую части уравнения на выражение в скобках:

$2^{3\sqrt{x}-1} = 4$

Приведем к одному основанию:

$2^{3\sqrt{x}-1} = 2^2$

Уравняем показатели и решим полученное уравнение:

$3\sqrt{\tilde{o}} - 1 = 2$

$3\sqrt{\tilde{o}} = 3$

$\sqrt{\tilde{o}} = 1$

$\tilde{o} = 1$

Запишем ответ. Ответ: 1.

2. Решить неравенство.

$$3\cdot 4^{\tilde{o}} + 2\cdot 4^{\tilde{o}+1} + 3\cdot 4^{\tilde{o}+2} \le 236$$

Решение.

Вынесем общий множитель за скобки: $4^{\tilde{o}}(3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 4^2) \le 236$

Выполним действия в скобках: $4^{\tilde{o}}\cdot 59 \le 236$

Разделим левую и правую части неравенства на 59:

$4^x \leq 4$.

Решим полученное неравенство (помня о монотонности функции с данным основанием) :

$4 > 1$, $y = 4^{x}$ – возрастающая.

$x \leq 1$.

Запишем ответ. Ответ: $(-\infty;1]$

Приведение показательных уравнений (неравенств) к квадратным путем почленного деления на одну из степеней.

Показательные уравнения (неравенства) вида $Aa^{2x} + B(ab)^x + Cb^{2x} = 0$

Являются однородными. Решаются такие уравнения 9неравенства) почленным делением, как правило, или на $a^{2x} \neq 0$, или на $b^{2x} \neq 0$

$(a^{2x} > 0;\ b^{2x} > 0)$

Решить уравнение.

$$3 \cdot 16^{\tilde{o}} + 2 \cdot 81^{\tilde{o}} = 5 \cdot 36^{\tilde{o}}$$

Запишем уравнение так:

$$3 \cdot 4^{2\tilde{o}} + 2 \cdot 9^{2\tilde{o}} - 5 \cdot (4 \cdot 9)^{\tilde{o}} = 0$$

Разделим обе части уравнения на $4^{2\tilde{o}} \neq 0$

$$\frac{9^{2\tilde{o}}}{4^{2\tilde{o}}} = \left(\frac{9}{4}\right)^{2\tilde{o}}$$

Приведение показательных уравнений (неравенств) к простейшим путем деления левой и правой части на одну из степеней.

Показательные уравнения (неравенства) вида $a^{xn} = b^{xn}$ $(a \neq b)$

Приводятся к простейшим путем деления обеих частей на b^{xn} или на a^{xn}

$(b^{xn} \neq 0;\ a^{xn} \neq 0)$.

1. Решить уравнение:

$2^{x-1} = 3^{x-2}$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $3^{x-2} \neq 0$

$$\frac{2^{\tilde{o}-2}}{3^{\tilde{o}-2}} = 1$$

Приведем обе части к одному основанию используя свойства

$\frac{\grave{a}^{\tilde{o}}}{b^{x}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{x}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0}$

$a^{0} = 1$

Приравняем показатели и решим полученное уравнение:

$x – 2 = 0$

$x = 2$.

Запишем ответ. Ответ: 2.

Приведение показательных уравнений (неравенств) к квадратном путем введения новой переменной.

Показательные уравнения (неравенства) вида $Aa^{2x} + ba^{x} + C = 0$ приводятся к квадратным путем замены $a^{x} = t$, $t>0$ (показательная функция приобретает только положительные значения).

Справедливы следующие свойства степеней: $a^{x+y} = a^{x} a^{y}$ $a^{x-y} = \frac{\grave{a}^{\tilde{o}}}{\grave{a}^{\acute{o}}}$ $a^{xy} = (a^{x})^{y} = (a^{y})^{x}$

1. Решить уравнение $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

Решение.

Выполнив тождественные преобразования, приведем уравнение к квадратному:

$3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2$.

$3^{2\tilde{o}+4} \cdot 3 = 3^{x+2} + 2$.

Сделаем замену:

Замена

$3^{x+2} = t$, $t> 0$

Тогда $3^{2x+4} = t^{2}$

Решим полученное квадратное уравнение относительно t :

$3t^{2} – t – 2 = 0$

$t_1 = 1$; $t_2 = -\frac{2}{3}$ - не удовлетворяет условию $t > 0$/

Вернемся к замене и решим показательное уравнение:

$3^{x+2} = 1$; $x + 2 = 0$; $x = -2$.

Запишем ответ. Ответ: -2.

Ответить на вопросы:

1. Дайте определение показательной функции. Приведите примеры.
2. Сформулируйте свойства показательной функции. Приведите примеры.
3. Приведите примеры графиков показательных функций.
4. Какие приемы решения показательных уравнений вы знаете?
5. Какие условия должны выполняться при решении показательных неравенств?

Вариант 1.

1. $5^{2-3\tilde{o}} = \frac{1}{25}$
2. $49^{2\tilde{o}} \geq \frac{1}{7}$
3. $(0{,}2)^{2\tilde{o}^2-\tilde{o}} < 1$
4. $2 \cdot 2^{2\tilde{o}} - 5 \cdot 6^{\tilde{o}} + 3 \cdot 3^{2\tilde{o}} = 0$
5. $4 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 2^{x} + 1 = 0$
6. $21^{x^2-2x} = 5^{x^2-2x}$
7. $3^{2\cos 2x + 1} = 1$
8. Построить и исследовать график функции $y = 3^x$

Вариант 2.

1. $4^{1-2\tilde{o}} = \frac{1}{16}$
2. $64^x < \frac{1}{8}$
3. $\left(\frac{2}{3}\right)^{3\tilde{O}^2-3} > 1$
4. $3 \cdot 3^{2x} - 4 \cdot 3^{x} + 1 = 0$
5. $4 \cdot 3^{2x} - 9 \cdot 2^{2x} = 5 \cdot 6^{x}$
6. $2^{x^2+4x} = 3^{x^2+4x}$
7. $7^{2\sin x} = 1$
8. Построить график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\div}$

Практическая работа № 4

Тема: «Вычисление приближенного числового значения функции при помощи дифференциала»
Цель:
-овладеть методами вычисления приближенного числового значения функции при помощи дифференциала.
Обучающийся должен
иметь представление:
- о приложении дифференциала к приближенным вычислениям;

знать:
формулы приближенного интегрирования и дифференцирования.
уметь:
- вычислять приближенное значение функции и ее приращение через дифференциал;

Литература. Богомолов Н.В. Практическое пособие по математике: -М.: 1990г.

Ход занятия

Пусть дана функции y = f(x); приращение этой функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, ее дифференциал dy = f'(x)dx. При достаточно малых близких к нулю приращениях аргумента Δx будем считать, что $\Delta y \approx$ dy, т.е. что приращение функции приближенно равно ее дифференциалу.

Заменив приращение функции ее дифференциалом, получим

$$f'(x)dx \approx f(x+\Delta x) - f(x),$$

откуда $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$

Применение этой формулы дает значительное упрощение вычисления числового значения функции; геометрически это соответствует замене участка кривой отрезком касательной.

Задача 1.

Найти приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при x = 2 и Δx = 0,001

Решение.

Имеем $\Delta y \approx dy = 6x^2dx = 6 \times 2^2 \times 0{,}001 = 0{,}024$

Задача 2. На сколько увеличится при нагревании объем шара радиуса R, если его радиус удлинился на величину ΔR?

Решение.

Объем шара вычисляется по формуле V = (4/3) πR^3. Считая приращение ΔR аргумента R малым, заменим приращение объема шара его дифференциалом: $\Delta V \approx dV$. Следовательно, для вычисления приращения объема шара достаточно найти дифференциал функции V = (4/3) πR^3, т.е.

$$dV = 4\pi R^2 dR$$

Задача 3.

Найти приближенное значение функции $f(x) = 5x^3 - 2x + 3$ при x = 2,01.

Решение.

Полагая x = 2, Δx = 0,01, получим

$f(x) = f(2) = 5\cdot 2^3 - 2\cdot 2 + 3 = 39$

$f'(x)\,\Delta x = f'(2)\cdot 0{,}01 = (5\tilde{o}^2 - 2\tilde{o} + 3)'\Delta\tilde{o} = (15\cdot\tilde{o}^2 - 2)\cdot 0{,}01 = 0{,}58$

по формуле $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ находим f(2,01) = 39 + 0,58 = 39,58

Найдем точное значение функции: f(2,01) = $5\cdot(2{,}01)^3-2\cdot 2{,}01+3=39{,}583005$

Зачетная работа № 4 по теме: «Приложение дифференциала к приближенным вычислениям»

Вариант 1.

Задача 1. Вычислить дифференциал функции y = ln $\cos^2$x при x = $\frac{\pi}{4}$ и dx = 0,01

Задача 2. Вычислить относительную погрешность функции V = $((\frac{4}{3})\pi R^3$ при R = 300 и dR = 0,3

Задача 3. Найдите приближенное значение приращения функции y = $x^3 - x^2$ при x = 2 и Δx = 0,01

Задача 4. Найдите приближенное значение функции f(x) = $x^3 - x^2 + x - 3$ при x = 3,03

Задача 5. Вычислите приближенное значение величины $\frac{1}{0{,}998}$

Вариант 2.

Задача 1. Вычислите дифференциал функции y = ln tg 2x при x=$\frac{\pi}{8}$ и dx = 0,03

Задача 2. Вычислите относительную погрешность функции y = x^3 при x = 750 и dx = 0,5

Задача 3. Найдите приближенное значение приращения функции
y = $2\sqrt{x}$ + 4
при x = 25 и Δx = 0,01

Задача 4. Найдите приближенное значение функции f(x) = $3x^3 - x^2 + 5x - 1$
При x = 3,02.

Задача 5. Вычислите приближенное значение величины $(1{,}02)^7$.

Практическая работа № 5

Тема: «Приложение определенного интеграла при вычислении физических величин»

Цель:

-овладеть методами приложения определенного интеграла при вычислении физических величин

Литература. Богомолов Н.В. Практическое пособие по математике: -М.: 1990г.

Ход занятия

1. Общая схема применения интеграла.

Прежде чем перейти к применению определенного интеграла в области физики, необходимо уяснить себе путь, по которому в прикладных вопросах мы можем прийти к определенному интегралу.

Пусть требуется найти некоторую механическую или физическую величину Q, имеющую определенной значение на заданном отрезке [a,b]. Предполагается, что Q является аддитивной величиной, т.е. если отрезок [a,b] делится на части, то величина Q складывается из суммы значений Q , соответствующих этим частям. Из условия задачи находим «элемент» dQ величины Q, отвечающий «элементарному промежутку» [x,x+dx], в виде dQ=q(x)dx. После этого, интегрируя по отрезку [a, b], получают величину

$$Q = \int_a^b q(x)dx$$

Для пояснения этого разложим промежуток [a,b] точками $x_1 x_{2.}$.............x_{n-1} на элементарные промежутки

$[a, x_1],[x_1, x_2],......[x_i, x_{i=1}]........,[x_{n-1}$,b].

Так как каждому промежутку $[x_{i,}, x_{i+1}]$ или $[x_i, x_i + \Delta x_i]$ отвечает элементарная часть нашей величины, приближенно равная $q(x_i)\Delta x_i$, то вся искомая величина Q приближенно выразится суммой

$$Q = \sum_i q(x_i)\Delta x_i \,.$$

Степень точности полученного значения будет тем выше, чем мельче частичные промежутки, так что Q, очевидно, будет пределом упомянутой суммы, т.е. действительно выразится определенным интегралом

$$\int_a^b q(x_i)\Delta x_i \,.$$

Хочу подчеркнуть, что пользование интегралом вместо обыкновенной суммы весьма существенно. Сумма давала бы лишь приближенное выражение для Q, предельный же переход, с помощью которого из суммы получается интеграл, уничтожает погрешность и приводит к совершенно точному результату.

2. Нахождение статистического момента и центра тяжести кривой.

Как известно, статистический момент M материальной точки массы m относительно некоторой оси равен произведению массы m на расстояние d точки от оси. В случае системы n материальных точек с массами $m_1, m_2,....m_n$, лежащих в одной плоскости с осью, соответственно, на расстояниях $d_1, d_2,.....d_n$ от оси, статистический момент выразится суммой

$$M = \sum m_i d_i$$

При этом расстояния точек, лежащих по одну сторону от оси, берутся со знаком плюс, а расстояния точек по другую сторону – со знаком минус.

Если же массы не сосредоточены в отдельных точках, но расположены сплошным образом, заполняя линию или плоскую фигуру, то тогда для выражения статистического момента вместо суммы потребуется интеграл.

В своей работе я остановлюсь на определении статистического момента M относительно оси x масс, расположенных вдоль некоторой плоской кривой AB. При этом я предположу кривую однородной, так что ее линейная плотность ρ (т.е. масса приходящаяся на единицу длины) будет постоянной; для простоты допустим даже, что ρ = 1 (в противном случае придется полученный результат лишь умножить на ρ). При этих предположениях масса любой дуги нашей кривой измеряется просто ее длиной, и понятие статистического момента приобретает чисто геометрический характер. Хочу заметить, что когда говорят о статистическом моменте (или центре тяжести) кривой – без упоминания о расположении вдоль по ней масс, - то всегда имеют в виду статистический момент (цент тяжести), определенный именно при указанных предположениях.

Выделим теперь какой-нибудь элемент ds кривой. Приняв этот элемент приближенно за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси, для его статистического момента получим выражение

$$dM_x = yds.$$

Суммируя эти элементарные статистические моменты, причем за независимую переменную возьмем дугу s, отсчитываемую от точки A, мы получим

$$M_x = \int_0^S yds.$$

Аналогично выражается и момент относительно оси y

$$M_y = \int_0^S xds.$$

Конечно, здесь предполагается, что y (или x) выражено через s. Практически в этих формулах s выражают через ту переменную (t, x или θ), которая играет роль независимой в аналитическом представлении кривой

тогда для выражения статистического момента вместо суммы потребуется интеграл.

В своей работе я остановлюсь на определении статистического момента M относительно оси x масс, расположенных вдоль некоторой плоской кривой AB. При этом я предположу кривую однородной, так что ее линейная плотность ρ (т.е. масса приходящаяся на единицу длины) будет постоянной; для простоты допустим даже, что ρ = 1 (в противном случае придется полученный результат лишь умножить на ρ). При этих предположениях масса любой дуги нашей кривой измеряется просто ее длиной, и понятие статистического момента приобретает чисто геометрический характер. Хочу заметить, что когда говорят о статистическом моменте (или центре тяжести) кривой – без упоминания о расположении вдоль по ней масс, - то всегда имеют в виду статистический момент (цент тяжести), определенный именно при указанных предположениях.

Выделим теперь какой-нибудь элемент ds кривой. Приняв этот элемент приближенно за материальную точку, лежащую на расстоянии y от оси, для его статистического момента получим выражение

$$dM_x = yds.$$

Суммируя эти элементарные статистические моменты, причем за независимую переменную возьмем дугу s, отсчитываемую от точки A, мы получим

$$M_x = \int_0^S yds.$$

Аналогично выражается и момент относительно оси y

$$M_y = \int_0^S xds.$$

Конечно, здесь предполагается, что y (или x) выражено через s. Практически в этих формулах s выражают через ту переменную (t, x или θ), которая играет роль независимой в аналитическом представлении кривой.

Статистические моменты M_x и M_y кривой позволяют легко установить положение ее центра тяжести $C(\xi\eta)$. Точка C обладает тем свойством, что если в ней сосредоточить всю «массу» S кривой (выражаемую тем же числом, что и длина), то момент этой массы относительно любой оси совпадает с моментом кривой относительно этой оси; в частности, если рассмотреть момент кривой относительно осей координат, то найдем

$$S\xi = M_y = \int_0^S xds, \qquad S\eta = M_x = \int_0^S yds, \text{ откуда}$$

$$\xi = \frac{M_y}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S xds, \qquad \eta = \frac{M_x}{S} = \frac{1}{S}\int_0^S yds.$$

Из формулы для ординаты η центра тяжести мы получаем замечательное геометрическое следствие. В самом деле, имеем

$$\eta S = \int_0^S yds, \quad \text{откуда} \quad 2\pi\eta s = 2\pi\int_0^S yds;$$

но правая часть этого равенства есть площадь P поверхности, полученной от вращения кривой AB, в левой части равенства $2\pi\eta$ обозначает длину окружности, описанной центром тяжести кривой при вращении ее около оси x, а S есть длина нашей кривой. Таким образом, приходим к следующей *теореме Гульдина:*

Величина поверхности, полученной от вращения кривой около некоторой не пересекающей ее оси, равна длине дуги этой кривой, умноженной на длину окружности, описанной центром тяжести C кривой

$$P = S2\pi\eta$$

Эта теорема позволяет установить координату η центра тяжести кривой, если известны ее длина S и площадь P описанной ею поверхности вращения.

Справедлива также вторая теорема Гульдена:

Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры около оси, не пересекающей ее и расположенной в плоскости фигуры, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описанной центром тяжести фигуры.

3. Статистические моменты и центр тяжести плоской фигуры.

Рассмотрим криволинейную трапецию aABb, ограниченную сверху графиком функции y=f(x), где y>0. Предположим, что по этой трапеции равномерно распределена масса, так что поверхностная плотность ρ постоянна. Определим статистические моменты M_x и M_y трапеции относительно осей координат и цент тяжести. Возьмем элементарный отрезок [x, x+dx] оси Ox. В криволинейной трапеции выделится элементарная полоска, которую приближенно можно считать прямоугольником. Масса полоски dm равна произведению плотности ρ на площадь полоски ydx, т.е. dm = ρ y dx.

Считаем, что эта масса сосредоточена в центре полоски, т.е. в точке

P$(x, \frac{y}{2})$. Тогда «элемент» статистического момента трапеции относительно оси Ox получится, как произведение массы dm на ординату точки P, т.е.

$$dM_x = dm\frac{y}{2} = \frac{1}{2}\rho y^2 dx$$

Аналогично,

$$dM_y = dmx = \rho xydx$$

Интегрируя эти «элементы» по отрезку [a, b], приходим к следующему результату:

$$M_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b y^2 dx; \qquad M_y = \rho\int_a^b xydx. \qquad (3)$$

Теперь легко определить координаты ξ, η центра тяжести фигуры. Известно, что m$\eta = M_x$, $m\xi = M_y$, где m – масса фигуры, вычисляемая по формуле

$$m = \rho \int_a^b y dx . \qquad (4)$$

Отсюда принимая во внимание формулы (3), получаем

$$\xi = \frac{M_y}{m} = \frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx}, ...\eta = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2}\frac{\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx}.$$

4. Давление жидкости.

Значение силы P давления жидкости на горизонтальную площадку зависит от глубины погружения x этой площадки, т.е. от расстояния площадки до поверхности жидкости.

Сила давления (Н) на горизонтальную площадку вычисляется по формуле

$$P = 9807\ \gamma Sx,$$

Где γ - удельный вес жидкости, кг/м^3; S – площадь площадки, м^2; x- глубина погружения площадки, м.

Если площадка, испытывающая давление жидкости, не горизонтальна, то давление на нее различно на разных глубинах, следовательно, сила давления на площадку есть функция глубины ее погружения P(x).

Пусть в жидкости вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_wA_2$, ограниченная прямой x = a, x = в и кривыми $y = y_1(x), \quad y = y_{2(}(x)$. Предполагается, что система координат выбрана так, что ось Oy лежит на поверхности жидкости. Требуется определить полное гидростатическое давление P, испытываемое каждой стороной пластинки. Возьмем в промежутке [a, b] элементарный отрезок [x, x+dx]. Тогда в нашей пластинке выделится элементарная полоска, которую приближенно можно считать прямоугольником с площадью dS = $(y_2 - y_1)dx$. Давление жидкости на эту полоску и будет «элементом» dP давления на всю пластинку $A_1B_1B_2A_2$. Для подсчета dP воспользуемся законом Паскаля, согласно которому давление жидкости на площадку dS, расположенную на глубине *x* от поверхности, равно весу цилиндрического столба жидкости высоты *x*, имеющего эту площадку своим основанием, т.е.

$$dP = \gamma dSx, \quad \text{где } \gamma \text{ - удельный вес жидкости.}$$

Или, принимая во внимание, что $dS = (y_2 - y_1)dx, \quad dP = \gamma x(y_2 - y_1)dx$

Интегрируя по отрезку [ab], получаем давление жидкости на всю фигуру:

$$P = \gamma \int_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$

5. Механическая работа

Из элементарной механики нам известно, что если сила, приложенная к движущейся точке M, сохраняет постоянную величину F и постоянный угол с направлением перемещения точки, то работа A этой силы на перемещение s точки выразится произведением Fcos(F,s), где (F,s) обозначает угол между направлениями силы и перемещения точки. Произведение $F_s = F\cos(F,s)$, очевидно, представляет собой проекцию силы F на перемещение s; вводя эту проекцию, можно выражение для работы представить в виде $A = F_s s$. Если направление силы совпадает с направлением перемещения точки, то $A = Fs$. В случае, когда оба направления прямо противоположны, $A = -Fs$.

Вообще говоря, однако, и величина силы F и угол (F s) ее с направлением перемещения могут не оставаться постоянными. При непрерывном изменении хоть одной из этих величин для выражения величины работы приходится прибегнуть снова к определенному интегралу.

Пусть путь s, проходимый точкой, будет независимой переменной: при этом предположим, что начальному положению A нашей точки M соответствует значение s= s_o, а конечному B – значение s=S. Каждому значению s в промежутке ($s_0 S$) отвечает определенное положение движущейся точки, а также определенное значение величин F и cos (F,s), которые, таким образом можно рассматривать как функции от s. Взяв точку M в каком–нибудь ее положении, определяемом значением s пути, найдем теперь приближенное выражение для элемента работы, соответствующего приращению ds пути, от s до s + ds, при котором точка M перейдет в близкое положение M′. В положении M на точку действует определенная сила F под определенным углом (Fs) ; так как изменение этих величин при переходе точки их M в M′ - при малом ds – также мало, пренебрежем этим изменением и, считая величину силы F и угол (Fs) приближенно постоянными, найдем для элемента работы на перемещении ds выражение

$$dA = F\cos(Fs)ds$$

так что вся работа A представляет интеграл

$$A = \int_{s_0}^{S} F\cos(Fs)ds$$

Из этого общего выражения для работы силы F ясно, что при (Fs)= $\frac{\pi}{2}$

Работа обращается в нуль действительно, при этом s (Fs)=0, так что подинтегральная функция оказывается нулем. Таким образом, сила, перпендикулярная к направлению перемещения, механической работы не производит.

Если действующую на точку силу F разложить (по правилу параллелограмма) на две составляющие – по касательной к пути, т.е. по направлению перемещения, и по нормали к нему, то, согласно сказанному, работу будет производить лишь касательная составляющая $F_s = F\cos(Fs)$:

$$A = \int_{S_0}^{S} F_s ds$$

Положим теперь, что F есть равнодействующая всех приложенных к точке сил, тогда, по закону Ньютона, касательная составляющая F_S равна произведению массы m точки на ее ускорение a_1 и выражение для работы A можно написать в виде

$$A = \int_{S_0}^{S} mads$$

Вспомним теперь, что

$$a = \frac{dv}{dt} \quad \text{и} \quad v = \frac{ds}{dt}, \text{так что} \quad a = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds}v;$$

в таком случае

$$A = \int_{S_0}^{S} mv\frac{dv}{ds}ds = \int_{S_0}^{S} d(\frac{1}{2}mv^2) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{1}{2}mv_0^2,$$

где через v_0 и V обозначены величины скорости, соответственно, в конечной и начальной точке пути.

Как известно, $\frac{1}{2}mv^2$ есть живая сила или кинетическая энергия точки; таким образом, мы пришли к важному предложению: механическая работа A, произведенная силой, под действием которой происходила движение точки, равна приращению кинетической энергии точки. Этот принцип, который можно распространить и на системы материальных точек, и на сплошные тела, играет в механике и физике очень важную роль. Его называют «законом живой силы».

Пример 1. Какую работу нужно затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли на высоту h? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено на бесконечность?

Р е ш е н и е. Величина силы F, производящей работу при поднятии тела с поверхности земли, равна величине силы притяжения тела Земли, т.е.

$$F(r) = k\frac{mM}{r^2},$$

где m – масса тела, M – масса Земли, r – расстояние от тела до центра Земли, k – постоянный коэффициент. Направлена сила по радиусу от центра Земли. В этом же направлении происходит и перемещение тела из положения $r_1 = R$ (R- радиус Земли) в положении $r_2 = R + h$.

Работу силы F® на пути [R, R+h] вычислим с помощью интеграла $A = \int_a^b F(x)dx$

$$A = \int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}dr = kmM\int_R^{R+h}\frac{dr}{r^2} = kmM(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}).$$

Учитывая, что на поверхности Земли (при r=R) сила притяжения F=mg, найдем коэффициент k:

$$mg = k\frac{mM}{R^2}, ...откуда.....k = \frac{gR^2}{M}.$$

И для искомой работы окончательно получим

$$A = mgR^2(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}).$$

При удалении тела на бесконечность имеем

$$\lim_{h \longrightarrow \infty} A = \lim mgR^2(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}) = mgR,$$

или

$$A_\infty = mgR.$$

Пример 2. При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука:

$$F = kx,$$

где F – сила, H; x – абсолютное удлинение пружины, м, вызванное силой F, а k – коэффициент пропорциональности, Н/м.

Например, мы знаем, что сжатие x винтовой пружины пропорционально приложенной силе F. Вычислим работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01м нужна сила 10Н.

Найдем коэффициент пропорциональности

$$k = \frac{F}{x} = 1000 \text{ Н/м},$$

подставим значение k в формулу силы, получим F=1000x, т.е. f(x)=1000x.

Искомую работу найдем, полагая ф=0, b=0,04:

$$A = \int_0^{0,04} f(x)dx = 500x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,8(\textit{Дж}).$$

Пример 3. Пусть некоторое количество газа (пара) содержится в цилиндре по одну сторону поршня, и предположим, что газ этот расширился и передвинул поршень направо. Поставим себе задачей определить работу, произведенную при этом газом.

Р е ш е н и е. Если начальное и конечное расстояние поршня от левого дна цилиндра обозначить через s_1 и s_2, давление (на единицу площади поршня) – через p, а площадь поршня через Q, то вся сила, действующая на поршень, будет pQ, и работа, как мы знаем, выразится интегралом

$$A = Q\int_{s_1}^{s_2} pds.$$

Обозначим через V объем рассматриваемой массы газа, очевидно, будем иметь V =Qs. Нетрудно теперь перейти от переменной s новой переменной V; мы получим

$$A = \int_{V_1}^{V_2} pdV, \qquad (1)$$

где V_1 и V_2 означают начальное и конечное значения объема V.

Если бы нам известно было давление p как функция от объема V, то этим определилась бы работа **A.** Предположим сначала, что при расширении газа температура его остается постоянной, так что необходимая для его расширения энергия в виде тепла притекает извне; в этом случае процесс называют изотермическим. Считая газ «идеальным», по закону Бойля Мариотта будем иметь: pV = c = const, так что $p = \frac{c}{V,}$, и для работы получаем значение

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{c}{V}dV = c\ln V \Big| \frac{V_2}{V_1} = c\ln\frac{V_2}{V_1}.$$

Если обозначить через p_1 и p_2 давление в начале и в конце процесса, то

$$p_1V_1 = p_2V_2 \text{ и } \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Поэтому работу расширения, связанного с переходом от давления p_1 к давлению $p_2 < p$, можно представить и в виде

$$A = c\ln\frac{p_1}{p_2}$$

Наконец, вместо c в эти формулы можно подставить произведение p_1V_1.

Часто бывает, однако, естественнее предположить, что во время расширения не происходит теплового обмена между газом и окружающей средой, и на производство работы затрачивается энергия самого газа, температура которого при этом понижается; такой процесс называется адиабатическим. В этом случае зависимость между давлением p и объемом V рассматриваемой массы газа имеет вид

$$pV^k = c = const$$

где k есть характерная для каждого газа (пара) постоянная, всегда большая единицы. Отсюда

$$pV^{-k}$$

и

$$A=\int_{V_1}^{V_2} cV^{-k}dV=\frac{c}{1-k}V^{1-k}\Big|_{V_1}^{V_2}=\frac{c}{1-k}(V_2^{1-k}-V_1^{1-k})=\frac{c}{1-k}(\frac{1}{V_2^{k-1}}-\frac{1}{V_1^{k-1}}).$$

Этот результат можно представить в более удобной форме, если вспомнить, что $cV_1^{-k}=p_{1,}$, $cV_2^{-k}=p_2$; подставляя, придем к следующему выражению работы:

$$A=\frac{p_1V_1-p_2V_2}{k-1}.$$

Мы лишь для простоты рассуждения и наглядности предположили расширяющийся газ заключенным в цилиндр. Основная формула (1), равно как и полученные из неё частные формулы, сохраняют силу независимо от формы, которую имеет в каждый данный момент рассматриваемая масса газа. Разумеется, те же формулы выражают и работу сжатия газа от объема V_2 до объема $V_{1,}<V_2$ (сопровождаемого повышением давления от p_2 до $p_1>p_2$), т.е. работу внешней силы, заставляющей газ сжиматься; работа самого газа в этом случае отрицательна.

Пример 4. Найти статистический момент относительно осей Ох и Оу и координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми х = у = а, х = 0, у = 0 (плотность $\rho=1$).

Р е ш е н и е. Здесь у = а – х. Применяя формулы (3), получим:

$$M_y=\int_0^a x(a-x)dx=(\frac{ax^2}{2}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^a=\frac{a_3}{6}.$$

Равенство моментов можно было установить и из соображений симметрии. Координаты центра тяжести треугольника вычисляются по формулам (4). Учитывая, что

$$m=S_\Delta=\frac{1}{2}a^3,$$

имеем

$$\xi=\eta=\frac{\frac{a^3}{6}}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{a}{3}.$$

Пример 5. Найти формулу для выражения статистического момента М поверхности вращения относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения. «Поверхностная плотность» предполагается равной единице.

Примем ось вращения за ось х , а за начало координат возьмем точку пересечения ее с упомянутой плоскостью. Масса (площадь) элементарного кольцевого слоя на расстоянии s от начала дуги есть $2\pi yds$, его статистический момент $dM=2\pi xyds$ и окончательно,

$$M=2\pi\int_0^S xyds=2\pi\int_0^S \Phi(s)\Psi(s)ds$$

В частности, если вращающая кривая задана явным уравнением y=f(x) (a$\le x\le b$),

$$M=2\pi\int_a^b xy\sqrt{1+y_X'^2}dx=2\pi\int_a^b x\cdot f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx.$$

Расстояние ξ центра тяжести поверхности от данной плоскости будет

$$\xi = \frac{M}{P} = \frac{\int\limits_0^S xyds}{\int\limits_0^S yds} = \frac{\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}}{\int\limits_a^b xy\sqrt{1+y_x'^2}}\frac{dx}{dx}.$$

Последнюю формулу применяем к поверхности кругового конуса и полусферы.

Находим расстояние центра тяжести от основания, для конуса оно равно $\frac{1}{3}$, высоты, а для полусферы расстояние равно $\frac{1}{2}$ радиуса.

Пример 6. Момент инерции (или квадратичным моментом) материальной точки массы m относительно некоторой оси (или плоскости) называется произведение массы m на квадрат расстояния d от точки до оси (до плоскости). Исходя из этого, предполагается найти выражение для момента инерции I_y относительно оси у плоской фигуры $A_1B_1B_2A_2$, в предположении, что «поверхностная плотность» распределения масс есть единица.

Имеем

$$dI_y = x^2(y_2 - y_1)dx,$$

$$I_y = \int\limits_a^b x^2(y_2 - y_1)dx.$$

Пример 7. Вычислим силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 20 м и высотой 5 м (уровень воды совпадает с верхним обрезом шлюза).

На глубине x выделим горизонтальную полоску шириной dx. Сила давления P на стенку шлюза есть функция от x. Изменение глубины x на малую величину dx вызовет изменение силы давления P на малую величину ΔP. Продифференцировав переменную P, получим приближенное значение (главная часть) $\mathrm{d}P$ приращения ΔP.

Находим приближенное значение силы давления воды на эту полоску:

$$\Delta P = 9{,}807\lambda x\Delta S = 9807x \cdot 20\Delta x......Но.......dP \approx \Delta P.$$

Интегрируя dP при изменении x от 0 до 5, получим

$$P = 9807 \cdot 20\int\limits_0^5 xdx = 9807 \cdot 10x^2 \Big|_0^5 = 2{,}45(MH).$$

Во всех рассмотренных нами задачах на применение определенного интеграла схема рассуждений была одна и та же. Искомая величина (работа, давление, момент силы и центр тяжести) соответствовала некоторому интервалу изменения переменной величины, как раз той, которая в последующем служила переменной интегрирования. Так, работа – интервалу $[s_{0,}s]$ изменения пути s, путь – интервалу $[\mathrm{T}_0, T]$ изменения времени t и т.д.

Первым нашим шагом являлось разбиение интервала [a,b] на частичные интервалы. При этом мы исходили из той существенной предпосылки, что определяемая величина, соответствующая всему интервалу, составляется как сумма из таких же величин, соответствующих всем частичным интервалам (свойство аддитивности). Так, работа, произведенная силой на некоторм участке, равна сумме работ, произведенных этой силой на всех частичных участках, и т.д.

Далее мы составляли сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины, тем более точное, чем меньше наибольший из частичных интервалов.

Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы находили искомую величину I виде интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

где f(x) – данная по условиям задачи функция (действующая сила, работа и т.д.)

По аналогии с рассмотренными задачами можно дать общую характеристику простейшей задачи, решаемой с помощью определенного интеграла. Эта характеристика состоит в следующем:

1. В задаче ищется значение I некоторой величины u, соответствующее данному интервалу [a,b] изменения независимой переменной x. Величина u обладает свойством аддитивности, т.е. при разбиении интервала на части ее значение, соответствующее всему интервалу, составляется как сумма ее значений, соответствующих частичным интервалам.
2. Если величину u отнести к переменному интервалу с закрепленным, например, левым концом $\alpha(\alpha \le \alpha)$ и переменным правым концом x, то u можно рассматривать как функцию независимой переменной x, т.е. u = F(x); функция F(x) предполагается дифференцируемой.

   При соблюдении обоих условий величина I будет равна

$$I = F(b) - F(a) = \int_a^b dF(x)$$

Это означает, что весь вопрос сводится к отысканию дифференциала du=dF(x).

Зачетная работа № 5 по теме «Приложение определенного интеграла при вычислении физических величин»

1. Вычислить статистический момент прямоугольника с основанием a и высотой h относительно его основания.

   Отв. A) $\dfrac{ah^2}{2}$; B) ah^2; C) $\dfrac{ah}{2.}$

2. Вычислить статистический момент прямоугольного равнобедренного треугольника, катеты которого равны a относительно каждой из его сторон.

   Отв.A) $\dfrac{a^3}{6},\dfrac{a^3}{6},\dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$; B) $\dfrac{a}{6},\dfrac{a}{3},\dfrac{a\sqrt{2}}{12}$; C) $a, a, \sqrt{2}a$

В следующих задачах найти статистический момент фигуры, ограниченной данными линиями, относительно оси абсцисс.

3. $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$

   Отв. A) $\ln 3 - \dfrac{1}{2}$; B) ln3; C) $\dfrac{1}{2} - \ln$

4. y=sin x и $y = \dfrac{1}{2}$ (для одного сегмента)

   Отв. A) $\dfrac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}$; B) $\dfrac{e - e^b}{e}$; C) $\dfrac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}}$

5. $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$

   Отв. A) $\dfrac{8}{9}(\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}} - 1)$; B) $\dfrac{8}{9}$; C) $\dfrac{5}{2}\sqrt{\dfrac{5}{2}} - 1$

6. Найти цент тяжести сектора круга радиуса R с центральным углом, равным 2α .ё

   Отв. Центр тяжести лежит на оси симметрии сектора на расстоянии А) $\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ от центра круга; $B)\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{4}$.

7. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью абсцисс.

   Отв. А) $\xi = \pi$ a, $\eta = \frac{5}{6}a$; В) $\xi = \frac{5}{6}a, \eta = \pi a$.

8. Найти момент инерции боковой поверхности цилиндра (радиус основания R, высота H) относительно его оси.

   Отв. А) $\frac{1}{2}MR^2$; В) M R^2 ; С) $\frac{1}{4}MR^2$.

9. Найти момент инерции поверхности шара радиуса R относительно его диаметра.

   Отв. А) $\frac{2}{3}MR^2$; В) MR^2 ; С) $\frac{1}{4}MR$.

10. Капля с начальной массой M падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя ежесекундно массу, равную m. Какова работа силы тяжести за время от начала движения до полного испарения капли? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.).

    Отв. А) $\frac{g^2M^3}{6m^2}$; В) $\frac{gM}{m^2}$; С) $\frac{6m^2}{g^2M^2}$.

11. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота 140 м, ребро основания (квадрата) 200 м. Удельный вес камня, из которого она сделана, приблизительно равен 2,5 Г/см^3 . Вычислить работу, затраченную при ее постройке на преодоление силы тяжести.

    Отв. А) $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}$кГм; В) $2\cdot 10^{12}$ кГм; С) $4\cdot 10^{12}$ кГм.

12. Найти координаты центра тяжести полуокружности радиуса r.

    Отв. А) x = 0, y = $\frac{2r}{\pi}$; В) $y = 0, x = \frac{2r}{\pi}$; С) $x = 1$, y = 2r.

13. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

    Отв. А) $x = y = 0{,}9p$; В) $x = 1, y = 1$; С) $x = y = 2$.

14. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной полукубической параболой $ay^2 = x^3$ и прямой x = a, a>0.

    Отв. $A)x = \frac{5a}{7}, y = 0$; В) x = 5a, y = 0; С) x = 0, y = 5a.

15. Найти центр тяжести параболического сегмента отсекаемого от параболы $y^2 = 2px$ прямой $x = h$.

    Отв. А) $x = \frac{3}{5}h, y = 0$; В) $x = 0, y = \frac{3}{5}h$; С) $x = 0, y = 1$.

16. Найти центр тяжести фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

    Отв. А) $x = \pi a, y = \dfrac{5}{6}a,$ В) $x = \dfrac{5}{6}a, y = \pi a$; С) $x = 2\pi a, y = a.$

17. Пользуясь второй теоремой Гульдина, найти центр тяжести полукруга радиуса а.

    Отв. А) $x = 0, y = \dfrac{4a}{3\pi}$; В) $x = \dfrac{4a}{3\pi}$,0 у = 0; С) $x = 0, y = 4a.$

18. Вычислить работу, которую необходимо затратить для того, чтобы выкачать воду, заполняющую цилиндрический сосуд высотой Н = 5 м и радиусом основания R = 3 м.
    Отв. А) 353 250 кГм; В) 200 000 кГм; С) 500 000 кГм.

19. Какую работу надо затратить, чтобы растянуть упругую прижину на 10 см, если сила в 1 кГм растягивает эту пружину на 1 см?
    Отв. А) 0,5 кГм; В) 2 кГм; С) 3 кГм.

20. Цилиндр диаметром 20 см и длиной 80 см заполнен паром под давлением 10 кг/см^2. Какую работу надо затратить, чтобы уменьшить объем газа в два раза, считая, что температура газа остается постоянной?
    Отв. А)1740 кГм; В) 2000 кГм; С) 1000 кГм.

Используемая литература:

1. А.А. Дадаян. Математика. Москва. Форум-ИНФРА – М, 2005 г. стр.26-47.
2. Н.В. Богомолов Практические занятия по математике: Учеб. Пособие для техникумов. 1990 стр.10-25
3. Данное методическое пособие.